פתרון מטלה 03 — מבוא לטופולוגיה, 80516

6 במאי 2026

שאלה 1

יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים. אם X ו־Y הומיאומורפיים נסמן זאת ב־$X \cong Y$.

סעיף א'

תהיי X קבוצה ויהי (Y, τ_Y) מרחב טופולוגי.
תהיי $f : X \to Y$ פונקציה ו־$\tau_X = f^*\tau_Y$ הטופולוגיה המושרית על X דרך f.
יהי (Z, τ_Z) מרחב טופולוגי נוסף ותהיי $g : (Z, \tau_Z) \to (X, f^*\tau_Y)$ פונקציה.
נוכיח ש־g רציפה אם ורק אם $f \circ g : (Z, \tau_Z) \to (Y, \tau_Y)$ רציפה.

הוכחה: $\Longleftarrow$ נניח כי g רציפה ומהגדרת הטופולוגיה המושרית מתקיים $\tau_X = f^*\tau_Y = \{f^{-1}(U) \mid U \in \tau_Y\}$.
f רציפה מהגדרה שכן כל קבוצה פתוחה ב־Y המקור שלה פתוח ב־X ומכיוון שהרכבת של פונקציה רציפות היא רציפה, הפונקציה $f \circ g$ רציפה.
$\Longrightarrow$ נניח כי $f \circ g$ רציפה ותהיי $V \in \tau_X$ קבוצה פתוחה כלשהי.
לפי הגדרת הטופולוגיה המושרית קיימת פתוחה $U \in \tau_Y$ כך שמתקיים $V = f^{-1}(U)$ אז נחשב

$$g^{-1}(V) = g^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ g)^{-1}(U)$$

אבל $f \circ g$ רציפה ו־U פתוחה ב־Y ולכן המקור של U תחת ההרכבה הוא פתוח ב־Z, כלומר $(f \circ g)^{-1}(U) \in \tau_Z$ וכן $g^{-1}(V) \in \tau_Z$ ו־g רציפה. □

סעיף ב'

יהיו Y קבוצה, (X, τ_X) מרחב טופולוגי, $f : X \to Y$, $\tau_Y = f_*\tau_X$ הטופולוגיה המושרית על Y דרך f, (Z, τ_Z) מרחב טופולוגי נוסף ו־$g : (Y, f_*\tau_X) \to (Z, \tau_Z)$.
נוכיח כי g רציפה אם ורק אם $g \circ f : (X, \tau_X) \to (Z.\tau_Z)$ רציפה.

הוכחה: בתור התחלה נשים לב שמהגדרה של הטופולוגיה המושרית על Y דרך f נובע כי f רציפה שכן $\tau_Y = f_*\tau_X = \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \tau_X\}$.
$\Longleftarrow$ נניח כי g רציפה ושוב מכך ש־f רציפה והרכבה של פונקציות רציפות הוא רציף נקבל $g \circ f$ רציפה.
$\Longrightarrow$ נניח כי $g \circ f$ רציפה. תהיי $V \in \tau_Z$ פתוחה ומתקיים

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$$

מההנחה על רציפות המקור של V כפתוחה חייב להיות פתוח ב־X, כלומר $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau_X$.
מהגדרת הטופולוגיה המושרית τ_Y, קבוצה $U \subseteq Y \in \tau_Y$ אם ורק אם המקור שלה תחת f הוא ב־τ_X ולכן אם נסמן $U = g^{-1}(V)$ הרי ש־$f^{-1}(U) \in \tau_X$ ולכן בהכרח $U \in \tau_Y$ כלומר $g^{-1}(V) \in \tau_Y$ ולכן g רציפה. □

סעיף ג'

יהי (X, τ) מרחב טופולוגי ותהיי σ טופולוגיה נוספת על X.
נראה ש־$\mathrm{id}_X : (X, \sigma) \to (X < \tau)$ רציפה אם ורק אם σ עדינה יותר מ־τ (קרי $\tau \subseteq \sigma$).
נסיק גם שהפונקציות

$$\mathrm{id}_X^{-1} : (X, \tau) \to (X, \sigma) \qquad \mathrm{id}_X : (X, \sigma) \to (X, \tau)$$

הן רציפות אם ורק אם $\tau = \sigma$.

הוכחה: נסתכל על $f = \mathrm{id}_X$, תהיי U פתוחה אז $\mathrm{id}_X^{-1}(U) = U$ ולכן בהכרח id_X רציפה אם ורק אם לכל $U \in \tau$ מתקיים $\mathrm{id}_X^{-1}(U) \in \sigma$ אם ורק אם לכל $U \in \tau$ מתקיים $U \in \sigma$ אם ורק אם $\tau \subseteq \sigma$.
בשביל ההסקה, היות והפונקציה ההופכית של פונקציית הזהות היא פונקציית הזהות בעצמה נובע ש־$\mathrm{id}_X^{-1} = \mathrm{id}_X : (X, \tau) \to (X, \sigma)$.
אם־כך, מהחלק הקודם בסעיף נקבל סימטרייה וש־id_X^{-1} רציפה אם ורק אם $\sigma \subseteq \tau$.
מההנחה שלנו שתי הפונקציות רציפות ולכן שתי ההכלות מתקיימות כלומר קיבלנו $\tau = \sigma$. □

שאלה 2

תהיי $(X, \leq)$ קבוצת סדורה קווית ותהיי $\tau = \tau_{ord}$ טופולוגיית הסדר על X.
נראה שהפונקציה $\min : X \times X \to X$ הנתונה על־ידי

$$\min(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & x_1 \leq x_2 \\ x_2 & x_2 \leq x_1 \end{cases}$$

רציפה.

הוכחה: נשים לב שהבסיס של τ הוא אוסף כל הקטעים הפתוחים

$$(a, b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$$

נעזר בהנחייה ונגדיר

$$C_1 = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 \leq x_2\}$$
$$C_2 = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_2 \leq x_1\}$$

נראה ש־C_1, C_2 סגורות שמכסות את X.
בשביל זה נראה ש־C_1 סגורה כלומר ש־$C_1^c = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > x_2\}$ היא איחוד כל המלבנים הפתוחים מהצורה

1. $(x, \infty) \times (-\infty, x)$ עבור $x \in X$
2. $(x, \infty) \times (-\infty, y)$ עבור $x, y \in X$ עם $x < y$ ושאין $z \in X$ המקיים $x < z < y$

יהי $(x_1, x_2) \in C_1^c$ כלומר $x_1 > x_2$, אנחנו רוצים מלבן פתוח $U \times V$ כך שמתקיים

$$(x_1, x_2) \in U \times V \subseteq \{(y_1, y_2) \mid y_1 > y_2\}$$

נחלק לשני מקרים

1. אם קיים $x_1 > z > x_2$ אז נוכל להגדיר $U = (z, \infty), V = (-\infty, z)$ ונקבל $x_1 \in U, x_2 \in V$.
   לכל $(y_1, y_2) \in U \times V$ מתקיים $y_1 > z$ וגם $z > y_2$ ולכן מטרנזטיביות $y_1 > y_2$ ו־$U \times V \subseteq C_1^c$
2. אם לא קיים z כך ש־$x_1 > z > x_2$ אז נגדיר $U = (x_2, \infty), V = (-\infty, x_1)$ ונקבל $x_1 \in U, x_2 \in V$.
   מההנחה, לכל $(y_1, y_2) \in U \times V$ מתקיים ש־$y_1 \in (x_2, \infty)$ כלומר $y_1 > x_2$ ומההנחה שלנו מכיוון שאין z בין ל־x_1, x_2 נובע כי $y_1 \geq x_2$ ומהלך זהה נקבל גם $y_2 < x_2$ ובסך־הכל $y_1 \geq x_1 > x_2 \geq y_2$ ולכן מטרנזטיביות $y_1 > y_2$ כלומר $U \times V \subseteq C_1^c$.

אז C_1^c היא איחוד כל המלבנים הפתוחים ואיחוד של פתוחות הוא פתוח ולכן C_1^c פתוחה ו־C_1 היא קבוצה סגורה וממהלך זהה נקבל שגם C_2 סגורה.
נשאר להראות ש־C_1, C_2 מכסות את X ולכן נשתמש בהדבקה סגורה:
מהגדרת הסדר הקווי נובע שלכל זוג מתקיים $x_1 \leq x_2$ או $x_2 \leq x_2$ ולכן $X \times X = C_1 \cup C_2$ וזה לא איחוד זר כי $C_1 \cap C_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2\}$.
נגדיר $f_1 : C_1 \to X, f_2 : C_2 \to X$ על־ידי

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 \qquad f_2(x_1, x_2) = x_2$$

במילים אחרות f_1, f_2 הן פונקציות ההטלה ולכן הן פונקציות רציפות ובפרט עבור כל $x_1 \in C_1 \cap C_2$ מתקיים ש־f_1, f_2 מזדהות.
נשים לב ש־$\min(x, y)|_{C_2} = f_2$ וכן $\min(x, y)|_{C_1} = f_1$ ולכן מהדבקה סגורה נובע ש־$\min(x, y)$ רציפה על כל המרחב. $\square$

שאלה 3

סעיף א'

נראה שאם $X_1 \cong Y_1$ ו־$X_2 \cong Y_2$ אזי $X_1 \times X_2 \cong Y_1 \times Y_2$.

הוכחה: מכך ש־$X_1 \cong Y_1$ אז קיימת $f : X_1 \to Y_1$ שהיא הומיאומורפיזם כלומר חד־חד ערכית, על ורציפה עם f^{-1} רציפה ובאופן דומה גם קיימת $g : X_2 \to Y_2$ שהיא הומיאומורפיזם.
נגדיר $h : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ על־ידי $h(x_1, x_2) = (f(x_1), g(x_2))$ ונראה פורמלית ש־h אכן הומיאומורפיזם:

1. חד־חד ערכיות:

$$h(x_1, x_2) = h(x_1' x_2') \iff (f(x_1), g(x_2)) = (f(x_1'), g(x_2')) \iff f(x_1) = f(x_1') \wedge g(x_2) = g(x_2')$$

אבל f, g חד־חד ערכיות ולכן $x_1 = x_1', x_2 = x_2'$.

2. על: יהי $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ ומכך ש־f, g הן על קיימים $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ כך ש־$y_1 = f(x_1), y_2 = g(x_2)$ ולכן $h(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$
3. רציפות: ראינו שבמכפלה של מרחבים טופולוגיים העתקה היא רציפה אם בכל קורדינאטה שלה היא רציפה ואכן f, g רציפות
4. הופכית רציפה

$$h^{-1}(y_1, y_2) = (f^{-1}(y_1), g^{-1}(y_2))$$

וזאת רציפה באותו אופן בכל קורדינאטה כי f^{-1}, g^{-1} רציפות.

אז h היא הומיאומורפיזם ו־$X_1 \times X_2 \cong Y_1 \times Y_2$. □

סעיף ב'

ניתן דוגמה מרחבים X, Y ולפונקציה $f : X \to Y$ רציפה, חד־חד ערכית ועל אבל כך ש־f^{-1} לא רציפה.

הוכחה: ניקח $X = [0, 1)$ ו־$Y = S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ ונגדיר $f : [0, 1) \to \mathbb{R}^2$ על־ידי $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ והיא רציפה בכל קורדינאטה ולכן f רציפה.
בנוסף, מכך ש־$t \in [0, 1)$ נובע מהגדרת מעגל היחידה ש־f היא פונקציה על והיא חד־חד ערכית מהמחזוריות של $\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)$ בקטע זה.
נשים לב ש־f^{-1} לא רציפה בנקודה $(1, 0)$ שכן אם נתקרב אליה על המעגל מצד אחד $t \to 0$ ומצד שני $t \to 1$ ו־$1 \notin [0, 1)$. □

שאלה 4

יהיו $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ מרחבים טופולוגיים. יהי $X=\prod_{i\in I}X_i$ ונסמן את ההטלות $\pi_i : X\to X_i$, טופולוגיית המכפלה על X ב־τ_{prod} ואת טופולוגיית התיבה על X ב־τ_{box}.

סעיף א'

יהי (Y,τ_Y) מרחב טופולוגי ותהיי $f:Y\to\left(X,\tau_{prod}\right)$ פונקציה. נוכיח כי f רציפה אם ורק אם לכל $i\in I$ הפונקציה $\pi_i\circ f:Y\to X_i$ היא רציפה.

הוכחה: הגדרנו את טופולוגיית המכפלה להיות הטופולוגיה המושרית מהבסיס

$$\mathcal{B}_{prod}=\left\{\prod_{i\in I}U_i \mid \forall i\in I,\ U_i\in\tau_i,\ U_i\subseteq X_i,\ \left|\{\beta\in I\mid U_\beta\neq X_\beta\}\right|<\infty,\ U_i=X_i \text{ for almost every i}\right\}$$
$$=\left\{\prod_{i\in I}U_i \mid \forall i\in I,\ U_i\in\tau_i,\ U_i\subseteq X_i,\ \exists J\subset I, s.t.\ |J|<\infty\wedge\forall j\in J, U_j=X_j\right\}$$

$\Longleftarrow$ נניח ש־f רציפה ויהי $i\in I$.
מהגדרת טופולוגיית המכפלה, ההטלה $\pi_i : X\to X_i$ היא פונקציה רציפה ומכיוון שהרכבת פונקציות רציפות היא רציפה נובע כי $\pi\circ f:Y\to X_i$ היא רציפה וזה נכון לכל $i\in I$.
$\Longrightarrow$ נניח שלכל $i\in I$ הפונקציה $\pi_i\circ f$ רציפה. עלינו להראות ש־f רציפה.
אם כך, מספיק להראות שהמקור של כל קבוצה בסיסית פתוחה הוא פתוח ב־Y.
נסמן ב־$J\subset I$ את קבוצת האינדקסים הסופית מההגדרה ותהיי $B\in\mathcal{B}_{prod}$ פתוחה.
מהבנייה שראינו בהרצאה של $\mathcal{B}_{prod}$ נובע כי ניתן לכתוב את B על־ידי חיתוכים של מקורות תחת הטלות, כלומר $B=\bigcap_{j\in J}\pi_j^{-1}(U_j)$ ונחשב את $f^{-1}(B)$

$$f^{-1}(B)=f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J}\pi_j^{-1}(U_j)\right)=\bigcap_{j\in J}f^{-1}(\pi_j^{-1}(U_j))=\bigcap_{j\in J}\left(\pi_j\circ f\right)^{-1}(U_j)$$

מההנחה שלנו כל $\pi_j\circ f$ היא רציפה ולכן לכל U_j פתוחה ב־X_j מתקיים ש־$\left(\pi_j\circ f\right)^{-1}(U_j)$ פתוחה ב־Y.
אבל J היא תת־קבוצה סופית אז $f^{-1}(B)$ זה חיתוך סופי של קבוצות פתוחות ולכן הוא פתוח ב־Y והמקור של כל קבוצה בסיסית תחת f הוא קבוצה פתוחה ולכן f רציפה.□

סעיף ב'

נניח ש־I אינסופית וש־$|X_i|\geq 2$ לכל $i\in I$ ונראה ש־$\left(X,\tau_{prod}\right)$ אינו דיסקרטי.

הוכחה: עלינו להראות ש־$\tau_{prod}\neq\mathcal{P}(X)$ ולכן מהספיק להראות שקיימת $U\in\mathcal{P}(X)$ כך ש־$U\notin\tau_{prod}$ כלומר מספיק שנראה שקיים $x\in X$ כך ש־$\{x\}\notin\tau_{prod}$.
נניח בשלילה ש־$\{x\}\in\tau_{prod}$. מהגדרת טופולוגיית המכפלה, כל קבוצה פתוחה (שאינה ריקה) מכילה קבוצה פתוחה בסיסית מהצורה $B=\prod_{i\in I}U_i$ כך שלכל $i\in I$ מתקיים $U_i\in\tau_i$ פתוחה ו־$J\subset I$ סופית כך שלכל $j\in J$ מתקיים $U_j=X_j$.
מכך ש־$B\subset\{x\}$ ו־B איננה ריקה חייב להתקיים $B=\{x\}$ אבל גם לכל $j\in J$ מתקיים $X_j=\{x_j\}$ אבל נתון ש־$|X_i|\geq 2$ לכל $i\in I$ וזאת סתירה לכך ש־$|X_i|=1$.
אז היחידון $\{x\}$ לא פתוח ולכן הטופולוגיה לא יכולה להיות דיסקרטית. □

סעיף ג'

נסמן ב־τ_{box} את טופולוגיית הקופסאות על X ונוכיח שאם X_i דיסקרטי לכל $i\in I$ אזי (X,τ_{box}) הוא דיסקרטי.

הוכחה: הגדרנו את טופולוגיית הקופסה להיות הטופולוגיה הנוצרת על־ידי הבסיס $\mathcal{B}_{box}:=\left\{\prod_{i\in I}U_i \mid U_i\in\tau_i\right\}$.
יהי $x\in X$ ונראה ש־$\{x\}\in\tau_{box}$.
מהגדרת X ניתן לכתוב את היחידון שלו על־ידי $\{x\}=\prod_{i\in I}\{x_i\}$.
מהנתון, כל (X_i,τ_i) הוא דיסקרטי ובמרחב דיסקרטי כל כל קבוצה היא גם סגורה וגם פתוחה ולכן לכל $i\in I$ מתקיים ש־$\{x_i\}\in\tau_i$.
מהגדרת $\mathcal{B}_{box}$ נובע כי $\{x\}=\prod_{i\in I}\{x_i\}\in\mathcal{B}_{box}\subseteq\tau_{box}$.
אז כל יחידון הוא פתוח וכל $U\subseteq X$ יכול להיות מיוצג על־ידי איחוד של יחידונים ולכן כל U כזאת היא פתוחה ולכן (X,τ_{box}) הוא דיסקרטי. □

סעיף ד'

נוכיח ש־$\tau_{prod}=\tau_{box}$ אם ורק אם מספר האינדקסים i שעבורם הטופולוגיה על X_i אינה הטופולוגיה הטריוויאלית הוא סופי.

הוכחה: ראשית נסמן ב־$K=\{i\in I\mid\tau_i\neq\{\emptyset,X_i\}\}$ את קבוצת האינדקסים שעבורם הטופולוגיה על X_i אינה הטופולוגיה הטריוויאלית.
ממה שראינו בהרצאה תמיד מתקיים $\tau_{prod}\subseteq\tau_{box}$ ולכן נשאר רק להראות ש־$\tau_{box}\subseteq\tau_{prod}$ אם ורק אם K סופית.
$\Longrightarrow$ נניח כי K סופית ותהיי $B\in\mathcal{B}_{box}$ קבוצה בסיסית לא ריקה כך ש־$B=\prod_{i\in I}U_i$ עם $U_i\in\tau_i$ לכל $i\in I$.
מכך ש־I אינסופית, עבור כל $i\notin K$ נקבל ש־τ_i היא טריוויאלית, אבל $U_i\neq\emptyset$ ולכן $U_i=X_i$.
לכן $\{i\in I\mid U_i\neq X_i\}\subseteq K$ אבל K סופית ולכן יש מספר סופי של אינדקסים שבהם $U_i\neq X_i$ ולכן $B\in\mathcal{B}_{prod}$ מהגדרה ו־$\tau_{box}\subseteq\tau_{prod}$.
$\Longleftarrow$ נניח כי $\tau_{box}=\tau_{prod}$ אבל K אינסופית.
לכל $i\in K$ הטופולוגיה τ_i היא לא הטופולוגיה הטריוויאלית ולכן קיימת $U_i\in\tau_i$ כך ש־$U_i\neq\emptyset$ וגם $U_i\neq X_i$.
לכל $i\notin K$ נגדיר $U_i=X_i$ ונתבונן ב־$B=\prod_{i\in I}U_i$ ולכן B היא קבוצה פתוחה ולא ריקה בטופולוגיית הקופסה ומההנחה היא גם פתוחה בטופולוגיית המכפלה ולכן היא חייבת להכיל גם קבוצה בסיסית לא ריקה של טופולוגיית המכפלה, כלומר קיים $V=\prod_{i\in I}V_i$ כך ש־$V\in\mathcal{B}_{prod}$ עם $V\subseteq B$.
כלומר לכל $i\in I$ מתקיים $V_i\subseteq U_i$ אבל V היא קבוצת בסיס של טופולוגיית המכפלה ולכן $V_i=X_i$ לכל האינדקסים פרט למספר סופי ולכל השאר מתקיים $X_i\subseteq U_i$
כלומר $U_i=X_i$ אבל זו סתירה לבנייה שלנו על K שהיא קבוצה אינסופית ונקבל ש־$U_i=X_i$ כמעט לכל $i\in I$ וזאת סתירה ולכן K סופית. □

שאלה 5

יהיו $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ מרחבים מטרים ויהי $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את המטריקה

$$\hat{d}_n(a,b) = \min(d_n(a,b), 1)$$

נראה שהמטריקה

$$d\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\hat{d}_n(a_n, b_n)$$

על X משרה את טופולוגיית המכפלה.

הוכחה: נסמן ב־τ_d את הטופולוגיה המושרית מהמטריקה d ועלינו להראות $\tau_{prod} = \tau_d$ כלומר $\tau_{prod} \subseteq \tau_d$ ו־$\tau_d \subseteq \tau_{prod}$.
($\subseteq$) מספיק שנראה שלכל $U \in \tau_{prod}$ ו־$a \in U$ קיים $B_d(a,\varepsilon) \subseteq U$.
תהיי $U = \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ בסיסית בטופולוגיית המכפלה שמכילה את $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ויהי $J \subset \mathbb{N}$ קבוצת האינדקסים הסופית מהגדרת הבסיס עבורם $U_n = X_n$ לכל $n \notin J$ ו־U_n פתוחה ב־X_n עבור $n \in J$.
לכל $n \in J$ מכך ש־U_n פתוחה ב־X_n ו־$a_n \in U_n$ נובע שקיים $\varepsilon_n > 0$ כך ש־$B_{d_n}(a_n, \varepsilon_n) \subseteq U_n$ ולכן בלי הגבלת הכלליות נניח $\varepsilon_n \leq 1$.
נבחר $\varepsilon = \min_{n\in J} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ ומכך ש־J סופית נובע כי $\varepsilon > 0$.
ניקח $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_d(a,\varepsilon)$ כלומר $d(a,b) < \varepsilon$ ולכן לכל $n \in J$ נקבל

$$\frac{1}{2^n}\hat{d}_n(a_n, b_n) \leq d(a,b) < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_n}{2^n} \Longrightarrow \hat{d}_n(a_n, b_n) < \varepsilon_n \leq 1$$

ולכן בהכרח מתקיים $\hat{d}(a_n, b_n) = d_n(a_n, b_n) < \varepsilon$ כלומר $b_n \in U_n$ לכל $n \in J$ ועבור $n \notin J$ מתקיים $b_n \in X_n = U_n$ ולכן $b \in U$ וסיימנו.
($\supseteq$) מספיק שנראה שלכל כדור $B_d(a,\varepsilon)$ קיימת בסיסית פתוחה $U \in \tau_{prod}$ כך ש־$a \in U \subseteq B_d(a,\varepsilon)$.
אז יהי $B_d(a,\varepsilon)$ כזה ולכן מכך שהטור $\sum_n \frac{1}{2^n}$ מתכנס נובע שקיים N כך שמתקיים

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ונגדיר את U_n בצורה הבאה:

$$U_n = \begin{cases} U_n = B_{d_n}(a_n, \frac{\varepsilon}{2N}) & n \leq N \\ U_n = X_n & n > N \end{cases}$$

לבסוף נגדיר $U = \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$.
מכיוון ש־$U_n \neq X_n$ למספר סופי של אינדקסים U היא אכן בסיסית פתוחה תחת טופולוגיית המכפלה ו־$a \in U$.
יהי $b \in U$ ונחשב

$$d(a,b) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}\hat{d}_{n(a_n,b_n)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\hat{d}_n(a_n, b_n)$$

בשביל המחובר הראשון בסכום מכך ש־$n \leq N$ ומכך ש־$b \in U$ מתקיים $d_n(a_n, b_n) < \frac{\varepsilon}{2N}$ וכן $\hat{d}_n \leq d_n$ אז

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}\hat{d}_{n(a_n,b_n)} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2N} = \frac{\varepsilon}{2}$$

מצד שני, עבור $n > N$ מכך ש־$\hat{d}_n \leq 1$ לכל שאר הצמדים נקבל

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\hat{d}_n(a_n, b_n) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן $d(a,b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ולכן $b \in B_d(a,\varepsilon)$ כלומר $U \subseteq B_d(a,\varepsilon)$.

$\square$

שאלה 6

נוכיח ש־$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}\cong\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \max(|x|,|y|)\le 1\}$ כאשר הטופולוגיה על כל אחת מהקבוצות היא הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}^2$.

הוכחה: עלינו למצוא פונקציה שהיא הומיאומורפיזם.

נגדיר

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$$
$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\}\le 1\}$$

כאשר D דיסק היחידה הסגור ו־D ריבוע היחידה הסגור, אנחנו צריכים לבנות $f:D\to S$ שהיא הומיאומורפיזם, כלומר f צריכה לשמור את המרחק של נקודה מהראשית פר כל נורמה ובפרט שתשמור על זווית.

ניקח $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ו־$\|v\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$ כלומר

$$D=\{v\in\mathbb{R}^2 \mid \|v\|_2\le 1\}$$

ו־$\|v\|_\infty=\max(|x|,|y|)$ כלומר

$$S=\{v\in\mathbb{R}^2 \mid \|v\|_\infty\le 1\}$$

טבעי להגדיר אם־כך

$$f(v)=\begin{cases}\frac{\|v\|_2}{\|v\|_\infty}v & v\neq(0,0)\\ (0,0) & v=(0,0)\end{cases}$$

היא מוגדרת היטב: לכל $v\neq(0,0)\in D$ מתקיים $\|v\|_2\le 1$ ואכן

$$(\star)\ \|f(v)\|_\infty=\left\|\frac{\|v\|_2}{\|v\|_\infty}v\right\|_\infty=\frac{\|v\|_2}{\|v\|_\infty}\|v\|_\infty=\|v\|_2$$

כלומר $f(v)\in S$.

כדי להראות שהיא חד־חד ערכית ועל, נגדיר את ההופכית שלה ישירות $g:S\to D$ על־ידי

$$g(w)=\begin{cases}\frac{\|v\|_\infty}{\|v\|_2}w & w\neq(0,0)\\ (0,0) & w=(0,0)\end{cases}$$

כדי להראות שהיא הופכית צריך להראות ש־$g(f(v))=v$ לכל $v\neq(0,0)$ ו־$f(g(w))=w$ לכל $w\neq(0,0)$ (בראשית זה טריוויאלי).

נסמן $w=f(v)=\frac{\|v\|_2}{\|v\|_\infty}v$ ומ־$(\star)$ נובע ש־$\|w\|_\infty=\|v\|_2$ אז רק נשאר לחשב את $\|w\|_2$

$$\|w\|_2=\left\|\frac{\|v\|_2}{\|v\|_\infty}v\right\|_2=\frac{\|v\|_2}{\|v\|_\infty}\|v\|_2=\frac{\|v\|_2^2}{\|v\|_\infty}$$

אז

$$g(w)=\frac{\|w\|_\infty}{\|w\|_2}w=\frac{\|v\|_2}{\frac{\|v\|_2^2}{\|v\|_\infty}}\left(\frac{\|v\|_2}{\|v\|_\infty}v\right)=\frac{\|v\|_2\|v\|_\infty}{\|v\|_2^2}\frac{\|v\|_2}{\|v\|_\infty}v=v$$

כלומר אכן $g(f(v))=v$ ומהסימטרייה של ההגדרות שלנו נקבל שגם $f(g(w))=w$ ולכן f היא העתקה חד־חד ערכית ועל ו־$g=f^{-1}$.

נוכיח רציפות עבור f, הרציפות עבור g זהה: ברור שעבור $v\neq(0,0)$ יש לנו רציפות כי העתקות הנורמות הן רציפות ולכן גם מנה שלהן רציפה וגם כפל בסקלר הוא רציף ולכן f רציפה על $D\setminus\{(0,0)\}$.

נשאר להראות רציפות בראשית: מ־$(\star)$ מתקיים $\|f(v)\|_\infty=\|v\|_2$ לכל $v\neq(0,0)$ אז כאשר $v\to(0,0)$ גם $\|v\|_2\to 0$ כלומר $\|f(v)\|_\infty\to 0$ כלומר $f(v)\to(0,0)$ ולכן f רציפה בראשית.

אז f רציפה, חד־חד ערכית ועל עם הופכית רציפה ולכן היא הומיאומורפיזם ונקבל ש־$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}\cong\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \max(|x|,|y|)\le 1\}$. $\square$